Suites numériques

I. Suites réelles

1°) Définitions générales

Déf : On appelle suite réelle toute application $u:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u(n)$, usuellement notée u_n, est appelé terme d'indice n de la suite. Une telle suite est notée u, (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'ensemble de ces suites.

Déf : On appelle suite réelle définie à partir du rang $n_0\in\mathbb{N}$ toute application $u:\{n\in\mathbb{N}/n\geq n_0\}\to\mathbb{R}$.
Une telle suite est notée u, $(u_n)_{n\geq n_0}$ ou (u_n).

Déf : Une suite réelle $u=(u_n)$ est dite constante ssi $\exists C\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N},u_n=C$.
Cette suite est alors dite constante égale à C et est notée C.

Déf : Une suite réelle $u=(u_n)$ est dite stationnaire ssi $\exists C\in\mathbb{R},\exists N\in\mathbb{N},\forall n\geq N,u_n=C$.
Cette suite est alors dite stationnaire égale à C.

Déf : Soit $u=(u_n)$ une suite réelle.
On appelle valeur absolue la suite notée $|u|$ de terme général $|u_n|$.

Prop : Soit $u=(u_n)$ une suite réelle. On a équivalence entre :
(i) u est bornée
(ii) $\exists M\in\mathbb{R}^+,\forall n\in\mathbb{N},|u_n|\leq M$.
(iii) la suite $|u|$ est majorée.

2°) Opérations sur les suites réelles

Déf : Soit $u=(u_n)$ et $v=(v_n)$ deux suites réelles et $\lambda\in\mathbb{R}$.
On note $\lambda.u$ la suite de terme général λu_n.
On note $u+v$ la suite de terme général u_n+v_n.
On note uv la suite de terme général u_nv_n.

Prop : Soit u et v des suites numériques et $\lambda\in\mathbb{K}$.
Si u et v sont bornées alors $\lambda.u,u+v$ et uv le sont aussi.

3°) Suite arithmético-géométrique

Déf : On appelle suite arithmético-géométrique de raisons q et $r\in\mathbb{R}$ toute suite $u=(u_n)$ telle que $\forall n\in\mathbb{N},u_{n+1}=qu_n+r$.

Si $r=0$, on parle de suite géométrique de raison q, on a $u_n=q^nu_0$.

Si $q=1$, on parle de suite arithmétique de raison r, on a $u_n=u_0+nr$.

Si $q\neq1$: on cherche $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $v_n=u_n-\alpha$ soit géométrique. On parvient à $u_n=q^nu_0+\dfrac{q^n-1}{q-1}r$

II. Limite d'une suite réelle

$u=(u_n)$, $v=(v_n)$ et $w=(w_n)$ désignent des suites réelles

1°) Limite finie

a) définition

Déf : On dit que la suite u tend vers $\ell\in\mathbb{R}$ ssi $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N},n\geq N\Rightarrow|u_n-\ell|\leq\varepsilon$.
On note alors $u\to\ell$, $u_n\to\ell$ ou $u_n\underset{n\infty}{\to}\ell$.

Prop : Soit $u=(u_n)$ et $\ell\in\mathbb{R}$. On a équivalence entre :

(i) $u_n\to\ell$,

(ii) $|u_n-\ell|\to 0$.

b) convergence et divergence

Déf : On dit que la suite u converge ssi $\exists\ell\in\mathbb{R}, u_n\to\ell$.

Sinon on dit que la suite u diverge.

Théorème :(Unicité de la limite)

Si la suite u converge alors $\exists!\ell\in\mathbb{R}, u_n\to\ell$.

Ce réel ℓ est alors appelé limite de la suite u et on note $\ell=\lim u$, $\ell=\lim u_n$ ou $\ell=\lim\limits_{n^\infty} u_n$.

c) limites finies et relation d'ordre

Théorème :

Toute suite réelle convergente est bornée.

Prop : Soit u une suite réelle telle que $u_n\to\ell$ et $a,b\in\mathbb{R}$.

Si $a<\ell$ alors $\exists N_0\in\mathbb{N}, \forall n\geq N_0, u_n>a$.

Si $\ell<b$ alors $\exists N_1\in\mathbb{N}, \forall n\geq N_1, u_n<b$

Si $a<\ell<b$ alors $\exists N_2\in\mathbb{N}, \forall n\geq N_1, a<u_n<b$.

Théorème :

On suppose que $u_n\to\ell$ et $v_n\to\ell'$.

Si à partir d'un certain rang $u_n\leq v_n$ alors $\ell\leq\ell'$.

2°) Limites infinies

a) définition

Déf : On dit que la suite u tend vers $+\infty$ ssi $\forall A\in\mathbb{R}, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N, u_n\geq A$.

On note alors $u_n\underset{n^\infty}{\to}+\infty$ ou $u_n\to+\infty$.

Déf : On dit que la suite u tend vers $-\infty$ ssi $\forall B\in\mathbb{R}, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N, u_n\leq B$.

On note alors $u_n\underset{n^\infty}{\to}-\infty$ ou $u_n\to-\infty$.

Prop : $u_n\to+\infty\Leftrightarrow -u_n\to-\infty$.

b) limites infinies et relation d'ordre

Prop : Si $u_n\to+\infty$ alors u est minorée, non majorée.

Si $u_n\to-\infty$ alors u est majorée, non minorée.

Déf : Si $u_n\to+\infty$ (resp. $u_n\to-\infty$) alors on dit que u diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et on note $\lim\limits_{n^\infty} u_n=+\infty$ (resp. $\lim\limits_{n^\infty} u_n=-\infty$).

3°) Opération sur les limites

a) somme

Théorème :

1) Si $u_n\to\ell\in\mathbb{R}$ et $v_n\to\ell'\in\mathbb{R}$ alors $u_n+v_n\to\ell+\ell'$.

2) Si $u_n\to\ell\in\mathbb{R}$ et $v_n\to+\infty$ alors $u_n+v_n\to+\infty$.

3) Si $u_n\to\ell\in\mathbb{R}$ et $v_n\to-\infty$ alors $u_n+v_n\to-\infty$.

4) Si $u_n\to+\infty$ et $v_n\to+\infty$ alors $u_n+v_n\to+\infty$.

5) Si $u_n\to-\infty$ et $v_n\to-\infty$ alors $u_n+v_n\to-\infty$.

lemme :

Si u est minorée et $v_n\to+\infty$ alors $u_n+v_n\to+\infty$.

Cor : Par passage à l'opposé, on obtient les règles relatives aux différences de limites.

b) produit

Théorème :

1) Si $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$ et $v_n \to \ell' \in \mathbb{R}$ alors $u_n v_n \to \ell\ell'$.

2) Si $u_n \to \ell \neq 0$ et $v_n \to +\infty$ alors $u_n v_n \to \begin{cases} +\infty \text{ si } \ell > 0 \\ -\infty \text{ si } \ell < 0 \end{cases}$.

3) Si $u_n \to \ell \neq 0$ et $v_n \to -\infty$ alors $u_n v_n \to \begin{cases} -\infty \text{ si } \ell > 0 \\ +\infty \text{ si } \ell < 0 \end{cases}$.

4) Si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to +\infty$ alors $u_n v_n \to +\infty$.

5) Si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to -\infty$ alors $u_n v_n \to -\infty$.

6) Si $u_n \to -\infty$ et $v_n \to -\infty$ alors $u_n v_n \to +\infty$.

c) passage à l'inverse

Déf : Soit u une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On note $u_n \to \ell^+$ (resp. $u_n \to \ell^-$) pour signifier que $u_n \to \ell$ et $u_n > \ell$ à partir d'un certain rang (resp. $u_n < \ell$).

Théorème :

1) Si $u_n \to \ell \neq 0$ alors $1/u_n \to 1/\ell$.

2) Si $u_n \to 0^+$ alors $1/u_n \to +\infty$.

3) Si $u_n \to 0^-$ alors $1/u_n \to -\infty$.

4) Si $u_n \to +\infty$ alors $1/u_n \to 0^+$.

5) Si $u_n \to -\infty$ alors $1/u_n \to 0^-$.

Cor : On en déduit les règles de calculs relatives aux rapports de limites.

d) composition de limites

Théorème :

Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $u = (u_n)$ une suite réelle telle qu'à partir d'un certain terme général $u_n \in \mathcal{D}$.

Si $u_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $f(u_n) \to \ell$.

4°) Théorèmes d'existence de limite

a) théorèmes de comparaison

Théorème :

Si à partir d'un certain rang $|u_n - \ell| \leq v_n$ et si $v_n \to 0$ alors $u_n \to \ell$.

Prop : Si $u_n \to \ell$ alors $|u_n| \to |\ell|$.

Prop : Si (u_n) est bornée et $v_n \to 0$ alors $u_n v_n \to 0$.

Théorème :

On suppose qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$.

Si $u_n \to +\infty$ alors $v_n \to +\infty$.

Si $v_n \to -\infty$ alors $u_n \to -\infty$.

b) théorème des gendarmes

Théorème :

On suppose qu'à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n \leq w_n$. Si $v_n \to \ell \in \mathbb{R}$ et $w_n \to \ell$ alors $u_n \to \ell$.

c) théorème de convergence monotone

Théorème :

Si u est une suite croissante et majorée alors u converge.
Si u est une suite croissante non majorée alors u diverge vers $+\infty$.
Si u est une suite décroissante et minorée alors u converge.
Si u est une suite décroissante non minorée alors u diverge vers $-\infty$.

5°) Suites adjacentes

Déf : Deux suites réelles a et b sont dites adjacentes ssi a est croissante, b est décroissante et $\lim_{n^\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Théorème :

Si a et b sont deux suites réelles adjacentes alors elles convergent vers une même limite ℓ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \ell \leq b_n$.

Théorème : (des segments emboîtés)

Si $([a_n, b_n])$ est une suite décroissante de segments tels que $b_n - a_n \to 0$

alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ est un singleton.

6°) Suites extraites

Déf : On appelle suite extraite (ou sous-suite) d'une suite $u = (u_n)$ toute suite $v = (v_n)$ telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante (appelée extractrice) pour laquelle $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.

Une telle suite est alors notée $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ou encore $(u_{\varphi(n)})$.

Prop : Si w est une suite extraite d'une suite v elle-même extraite de u alors w est une suite extraite de u.

Prop : Toute suite extraite d'une suite de limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tend aussi vers ℓ.

Théorème :

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers une même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $u_n \to \ell$.

Théorème : de Bolzano-Weierstrass

De toute suite réelle bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

III. Extension aux suites complexes

1°) Définition

Déf : On appelle suite complexe toute application $z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Une telle suite est notée z, (z_n) ou $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

L'ensemble des suites complexes est noté $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

Déf : Soit $z = (z_n)$ une suite complexe.

On appelle partie réelle de z la suite $\mathrm{Re}(z)$ de terme général $\mathrm{Re}(z_n)$.

On appelle partie imaginaire de z la suite $\mathrm{Im}(z)$ de terme général $\mathrm{Im}(z_n)$.

On appelle conjuguée de suite z la suite $\overline{z}$ de terme général $\overline{z_n}$.

On appelle module de suite z la suite $|z|$ de terme général $|z_n|$.

Déf : Une suite complexe $z = (z_n)$ est dite bornée ssi $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, |z_n| \leq M$.

Prop : Une suite complexe z est bornée ssi $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ le sont.

2°) Convergence

Déf : Soit z une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que z tend vers ℓ ssi $|z_n - \ell| \underset{n^\infty}{\to} 0$.

On note alors $z_n \underset{n^\infty}{\to} \ell$ ou $z_n \to \ell$.

Déf : On dit qu'une suite complexe z converge ssi $\exists \ell \in \mathbb{C}, z_n \to \ell$. Sinon on dit que z diverge.

Théorème :

Si une suite complexe z converge alors $\exists ! \ell \in \mathbb{C}, z_n \to \ell$.

Ce complexe ℓ est alors appelé limite de la suite z et on note $\ell = \lim_{n^\infty} z_n$ ou $\ell = \lim z_n$.

3°) Théorèmes liés à la convergence

Prop : Si $z_n \to \ell$ alors $\overline{z}_n \to \overline{\ell}$ et $|z_n| \to |\ell|$.

Théorème :

Toute suite complexe convergente est bornée.

Théorème :

Soit z et z' deux suites complexes.

Si $z_n \to \ell \in \mathbb{C}$ et $z'_n \to \ell' \in \mathbb{C}$ alors $z_n + z'_n \to \ell + \ell', z_n z'_n \to \ell\ell'$

De plus si $z_n \to \ell \neq 0$ alors $1/z_n \to 1/\ell$.

Théorème :

Soit z une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$.

On a équivalence entre :

(i) $z_n \to \ell$,

(ii) $\mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(\ell)$.

4°) Nature de (q^n) avec q complexe

Prop : Soit $q \in \mathbb{C}$.

Si $|q| < 1$ alors $q^n \to 0$.

Si $q = 1$ alors $q^n \to 1$.

Si $|q| \geq 1$ et $q \neq 1$ alors (q^n) diverge.

Supposons (q^n) converge vers un certain $\ell \in \mathbb{C}$.

Comme $q^{n+1} = q.q^n$, à la limite $\ell = q.\ell$ d'où $\ell = 0$ (sachant $q \neq 1$).

Or $|q^n| \geq 1$ et donc $q^n \not\to 0$. Absurde. Donc (q^n) diverge.

5°) Suites d'éléments de R²

a) distance euclidienne

Déf : Soit $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $b = (x', y') \in \mathbb{R}^2$.

On appelle distance euclidienne de a à b le réel : $d(a,b) = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}$.

Prop : $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^2$: $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$, $d(a,b) = d(b,a)$ et $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$.

b) suite

Déf : On appelle suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$ toute application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$.

Déf : Soit $u = (u_n)$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $u_n = (x_n, y_n)$.

Les suites réelles (x_n) et (y_n) sont appelées suites coordonnées de (u_n) .

c) convergence

Soit $u = (u_n)$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$.

Déf : On dit que u tend vers $\ell \in \mathbb{R}^2$, et on note $u_n \to \ell$, ssi $d(u_n, \ell) \to 0$.

On dit que la suite u converge ssi $\exists \ell \in \mathbb{R}^2$ tel que $u_n \to \ell$.

Prop : Si u converge alors $\exists ! \ell \in \mathbb{R}^2$ tel que $u_n \to \ell$.

ℓ est alors appelé limite de la suite u et on note $\ell = \lim u_n$.

Prop : Une suite $u = (u_n)$ d'éléments de $\mathbb{R}^2$ converge ssi ses suites coordonnées $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ convergent.

De plus si tel est le cas : $\lim u_n = (\lim x_n, \lim y_n)$.

IV. Comparaisons de suites numériques

Les suites considérées ici, sont réelles ou complexes, définies à partir d'un certain rang.

1°) Suite négligeable devant une autre

α et β désignent des suites de termes non nuls à partir d'un certain rang.

Déf : Une suite u est dite négligeable devant α ssi $\frac{u_n}{\alpha_n} \to 0$.

On note alors $u_n = \underset{n^\infty}{o}(\alpha_n)$, $u_n = o(\alpha_n)$ ou $u_n \ll \alpha_n$.

Prop : $u_n = o(\alpha_n)$ si et seulement si on peut écrire $u_n = \alpha_n \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \to 0$

Prop : Si $u_n = o(\lambda\alpha_n)$ (avec $\lambda \neq 0$) alors $u_n = o(\alpha_n)$.
Si $u_n = o(\alpha_n)$ et $v_n = o(\alpha_n)$ alors $u_n + v_n = o(\alpha_n)$.
Si $u_n = o(\alpha_n)$ alors $u_n\beta_n = o(\alpha_n\beta_n)$.

Prop : Si $u_n = o(\alpha_n)$ et $v_n = o(\alpha_n)$ alors $u_n = o(\alpha_n)$.

2°) Suite dominée par une autre

α et β désignent des suites de termes non nuls à partir d'un certain rang.

Déf : Une suite u est dite dominée par α ssi $\left(\frac{u_n}{\alpha_n}\right)$ est bornée. On note alors $u_n = O(\alpha_n)$ ou $u_n = \underset{n^\infty}{O}(\alpha_n)$.

Prop : $u_n = O(\alpha_n)$ si et seulement si on peut écrire $u_n = \alpha_n b_n$ avec (b_n) bornée.

Prop : Si $u_n = O(\lambda\alpha_n)$ alors $u_n = O(\alpha_n)$.
Si $u_n = O(\alpha_n)$ et $v_n = O(\alpha_n)$ alors $u_n + v_n = O(\alpha_n)$.
Si $u_n = O(\alpha_n)$ alors $u_n\beta_n = O(\alpha_n\beta_n)$.

Prop : Si $u_n = o(\alpha_n)$ et $\alpha_n = O(\beta_n)$ alors $u_n = o(\beta_n)$.
Si $u_n = O(\alpha_n)$ et $\alpha_n = o(\beta_n)$ alors $u_n = o(\beta_n)$.
Si $u_n = O(\alpha_n)$ et $\alpha_n = O(\beta_n)$ alors $u_n = O(\beta_n)$.

3°) Croissance comparée des suites de référence

Prop : (comparaison des suites de même type)
Pour $\alpha < \beta$ on a $n^\alpha = o(n^\beta)$ et $(\ln n)^\alpha = o((\ln n)^\beta)$.
Pour $0 < a < b$ on a $a^n = o(b^n)$.

Prop : (comparaison des suites de limite $+\infty$)
Pour $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$ on a :
$(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$, $n^\alpha = o(a^n)$ et $a^n = o(n!)$.

Prop : (comparaison des suites de limite nulle)
Pour $\alpha, \beta > 0$ et $0 < a < 1$ on a :
$\frac{1}{n!} = o(a^n), q^n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et $\frac{1}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{(\ln n)^\beta}\right)$.

*lemme :*Si u et v ne s'annulent pas à partir d'un certain rang :

$$u_n = o(v_n) \Rightarrow \frac{1}{v_n} = o\left(\frac{1}{u_n}\right).$$

4°) Suites équivalentes

Les suites considérées ici ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

a) définition

Déf : Une suite u est dite équivalente à une suite v ssi $u_n / v_n \to 1$. On note alors $u_n \underset{n^\infty}{\sim} v_n$ ou encore $u_n \sim v_n$.

Prop : Si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.

Prop : Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On a équivalence entre :
(i) $u_n \sim v_n$,
(ii) $u_n = v_n + o(v_n)$.

b) applications des équivalents

Théorème :

Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ou $\ell \in \mathbb{C}$ alors $u_n \to \ell$.

Théorème :

Soit u et v deux suites réelles.

Si $u_n \sim v_n$ alors, à partir d'un certain rang, u_n et v_n ont même signe.

Prop : Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.

Prop : Si $u_n \sim v_n$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.

Si $u_n \sim v_n$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = O(w_n)$.

Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n = o(w_n)$.

Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n = O(w_n)$.

c) détermination d'équivalents

Théorème :

Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$ alors $u_n w_n \sim v_n t_n$ et $\frac{u_n}{w_n} \sim \frac{v_n}{t_n}$. Si $u_n \sim v_n$ alors $\forall p \in \mathbb{Z}, u_n^p \sim v_n^p$.

Théorème :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs.

Si $u_n \sim v_n$ alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}, u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.

Prop : Si $u_n \to 0$ alors $\sin u_n \sim u_n$, $\tan u_n \sim u_n$ et $\ln(1+u_n) \sim u_n$.

Prop : Soit u et v deux suites de réels strictement positifs.

Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \to \ell$ avec $\ell = 0^+$, $\ell = +\infty$ ou $\ell \in \mathbb{R}^+ * \setminus \{1\}$

alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.